Jurnal Teknologi Dan Sistem Informasi Bisnis
Vol. 5 No. 2 April 2023 Hal. 164 -169
http://jurnal.unidha.ac.id/index.php/jteksis

E-ISSN : **2655-8238**
P-ISSN : **2964-2132**

Mengontruksi Kontrol Optimal Berkendala Pada Sistem *LTI* Dengan Keadaan Berkendala Menggunakan Metode Fungsi Penalti

Nurweni Putri[a], Iswan Rina[b]
[a]Universitas Dharma Andalas, nurweniputri@gmail.com
[b]Universitas Dharma Andalas, iswanrina0@gmail.com

Submitted: 15-04-2023, Reviewed: 03-05-2023, Accepted 10-05-2023
https://doi.org/10.47233/jteksis.v5i2.801

Abstract
The optimal control problem is defined as a problem in determining the control u(t) that depends on time t, such that it produces the optimum value for the objective function. The optimal control system with constrained conditions can be changed to an optimal control system without constraints by constructing the value of u(t) so that u(t) is not constrained. In this research, we will examine how to determine an optimal control of a system of time-independent state space or Linear Time Invariant (LTI) with constrained states and minimize a given objective function. In addition, how to construct an optimal controller that is constrained to become an optimal controller without constraints using the penalty function method and its implementation using Matlab. The results of this study are that the optimal control is:.

$$\min_{|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})|\leq \boldsymbol{U}}\{\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*_{\boldsymbol{n+1}}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})\} = \boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*_{\boldsymbol{n+1}}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})$$

Keywords: *Constraint LTI System, Optimum Control, Penalty Function*

Abstrak
Masalah kontrol optimal didefinisikan sebagai suatu masalah dalam menentukan kontrol $\mathbf{u}(\mathrm{t})$ yang bergantung tehadap waktu t, sedemikian sehingga menghasilkan nilai optimum bagi fungsi tujuan. Sistem kontrol optimal berkendala dengan keadaan berkendala dapat diubah menjadi sistem kontrol optimal tidak berkendala dengan mengkonstruksi nilai u(t) sehingga u(t) tidak berkendala. Dalam penelitian ini akan dikaji tentang bagaimana menentukan suatu kontrol yang optimal dari sistem ruang keadaan tidak bergantung waktu atau Linear Time Invariant (LTI) dengan keadaan berkendala dan meminimumkan fungsi objektif yang diberikan. Selain itu, bagaimana mengkonstruksi pengontrol optimal yang berkendala tersebut menjadi pengontrol optimal tak berkendala dengan menggunakan metode fungsi penalti serta implementasinya menggunakan Matlab. Adapun hasil dari penelitian ini adalah kontrol optimalnya harus memenuhi :

$$\min_{|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})|\leq \boldsymbol{U}}\{\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*_{\boldsymbol{n+1}}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})\} = \boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*_{\boldsymbol{n+1}}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})$$

Kata Kunci: Sistem LTI Berkdendala, Kontrol Optimal, Fungsi Penalti

PENDAHULUAN

Masalah kontrol optimal didefinisikan sebagai suatu masalah dalam menentukan kontrol $\mathbf{u}(\mathrm{t})$ yang bergantung tehadap waktu t, sedemikian sehingga menghasilkan nilai optimum bagi fungsi tujuan [9]. Kontrol optimal merupakan masalah penentuan suatu pengontrol optimal $\mathbf{u}(\mathrm{t})$ yang memenuhi sistem liear tidak bergantung waktu sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = A\,\mathbf{x}(t) + B\,\mathbf{u}(t) \tag{1}$$

dan meminimumkan fungsi objektif

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{u})dt \tag{2}$$

dimana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menyatakan keadaan, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ menyatakan kontrol, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$ dan $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah matriks simetris [9]. Sistem (1) merupakan sistem kontrol optimal yang tidak bergantung kepada waktu atau *Linear Time Invariant (LTI)*.

Berdasarkan [9], sistem (1) dikatakan berkendala jika kontrol **u(t)** yang meminimumkan fungsi tujuan (1.1.2) berkendala, atau ditulis

$$\mathbf{U}^- \leq \mathbf{u}(\mathrm{t}) \leq \mathbf{U}^+ \tag{3}$$

Sehingga syarat cukup untuk merubah sistem kontrol optimal berkendala menjadi sistem kontrol optimal tidak berkendala yaitu dengan mengkonstruksi kontrol **u(t)** sedemikian sehingga **u(t)** menjadi tidak berkendala.

Sekarang pandang sistem (1) dengan keadaan berkendala. Defenisikan fungsi kendala dari keadaan sebagai berikut :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathrm{t}), \mathrm{t}) \geq 0, \tag{4}$$

dimana $g_i(x_1(\mathrm{t}), x_2(\mathrm{t}), \ldots, x_n(\mathrm{t}), \mathrm{t}) \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots p$

Dengan demikian, dapat didefinisikan bahwa sistem (1) merupakan sistem kontrol optimal berkendala dengan keadaan yang juga berkendala, jika sistem tersebut memenuhi (3) dan (4).

Pada [4] dan [8] sudah dikaji tentang metode fungsi penalti pada masalah kontrol optimal

E-ISSN : **2655-8238**
P-ISSN : **2964-2132**

berkendala. Artikel ini akan mengkaji bagaimana merubah sistem kontrol optimal berkendala dengan keadaan yang juga berkendala ini menjadi sistem kontrol optimal tanpa kendala. Setelah dilakukan riset literatur, hal ini bisa dilakukan dengan cara mengkonstruksi kontrol **u(t)**, sedemikian sehingga; (1) memenuhi sistem (1) dengan kendala keadaan (4); (2) meminimumkan fungsi tujuan (2); dan (3) tidak memenuhi kendala (3).

Untuk menemukan kontrol optimal yang memenuhi ketiga kriteria ini dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa metode, salah satunya metode fungsi penalti. Metode fungsi penalti merupakan metode yang digunakan untuk merubah permasalahan optimasi berkendala menjadi masalah optimasi tanpa kendala dengan menambahkan suatu parameter penalti pada fungsi tujuan [6].

METODE PENELITIAN

Metode penelitian menjelaskan pendekatan, rancangan kegiatan, ruang lingkup atau objek, bahan dan alat utama, tempat, teknik pengumpulan data, definisi operasional variabel penelitian, dan teknik analisis. [Times New Roman, 10, normal], spasi 1.

2.3 Sistem Linier Kontinu Positif

Berikut akan diberikan teorema tentang kriteria kepositifan untuk sistem (3) yang diperluas dari Teorema 2 pada [7].

Teorema 1 [13] Sistem (3) adalah positif jika dan hanya jika A adalah matriks *Metzle*r, $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{r\times n}, D \in \mathbb{R}_+^{r\times m}, E \in \mathbb{R}_+^{n\times q}$, dan $F \in \mathbb{R}_+^{r\times q}$.

Definisi 2 [13] Suatu sistem LTI positif dikatakan *stabilizable* jika terdapat suatu kontrol **u** = *K***x** sedemikian sehingga untuk suatu matriks $K \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$ diperoleh (*A* + *BK*) adalah matriks *Metzler Hurwitz.*

2.2 Sistem Kontrol Optimal Berkendala
Diberikan masalah optimisasi sebagai berikut :

$$\min \ \mathrm{L}(\mathbf{x,u}) \tag{5}$$

$$\text{s.t} \quad \mathrm{f}_i(\mathbf{x.u}) = 0, \quad i = 1,2,...n \tag{6}$$

dimana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dan $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, yaitu jumlah konstrain persamaan sama dengan dimensi **x** permasalahanya adalah memilih $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ yang meminimumkan $\mathrm{L}(\mathbf{x,u})$ dan memenuhi konstrain $\mathrm{f}_i(\mathbf{x.u}) = 0$ [8].

Untuk menentukan kontrol **u**(t) yang meminimumkan (5) pada prinsipnya memiliki syarat orde bahwa variasi (pertambahan) fungsi objektif L (5) dan vektor konstrain f (6) terhadap x dan u adalah sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} dL \\ df \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_x^T & L_u^T \\ f_x & f_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{x} \\ d\mathbf{u} \end{pmatrix} = 0 \tag{7}$$

Seperti yang telah disebutkan diatas, untuk suatu optimun, persamaan (7) haruslah sama dengan nol. Perhatikan bahwa matriks $\begin{pmatrix} L_x^T & L_u^T \\ f_x & f_u \end{pmatrix}$ berukuran $(n+1)\times(n+m)$, maka agar (7) mempunyai solusi non trivial untuk $(d\mathbf{x}^T d\mathbf{u}^T)^T$, haruslah rank $\begin{pmatrix} L_x^T & L_u^T \\ f_x & f_u \end{pmatrix} < n+1$ yaitu baris-barisnya bergantung linier. Yaitu ada vektor λ yang terdiri atas *n* komponen sedemikian sehingga

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_x^T & L_u^T \\ f_x & f_u \end{pmatrix} = 0 \tag{8}$$

Persamaan (8) dapat juga diperoleh dengan mengkonstruksi fungsi hamiltonian dimana fungsi hamiltonian didefenisikan sebagai berikut

$$\mathrm{H}(\mathbf{x,u,\lambda}) = \mathrm{L}(\mathrm{x,u}) + \lambda^{\mathrm{T}}\mathrm{f}(\mathrm{x,u})$$

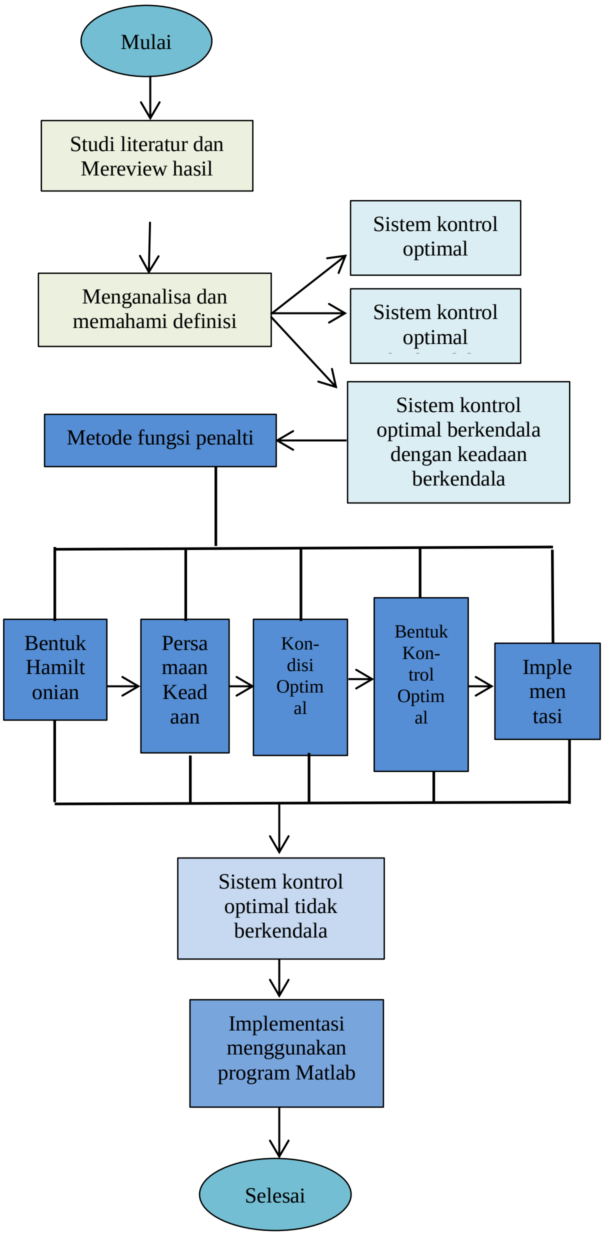
Berikut ini adalah langkah-langkah yang akan dilakukan dalam menyelesaikan penelitian ini.

1. Mengumpulkan referensi yang relevan berupa buku teks, jurnal, dan artikel terkait di internet maupun secara langsung.
2. Mereview hasil-hasil penelitian terdahulu tentang Metode Fungsi Penalti pada sistem kontrol optimal berkendala,.
3. Menganalisa defenisi dari sistem kontrol optimal, sistem berkendala, sistem berkendala dengan keadaan juga berkendala, dan metode fungsi penalti, serta teorema-teorema yang terkait.
4. Memperhatikan syarat cukup untuk merubah sistem kontrol optimal berkendala dengan keadaan yang juga berkendala menjadi sistem kontrol optimal tanpa kendala.
5. Memberikan contoh kasus yang terkait dan melakukan implementasi terhadap hasil-hasil menggunakan Matlab.

Langkah-langkah penelitian digambarkan dalam diagram alir berikut:

Jurnal Teknologi Dan Sistem Informasi Bisnis
Vol. 5 No. 2 April 2023 Hal. 164 -169
http://jurnal.unidha.ac.id/index.php/jteksis

E-ISSN : **2655-8238**
P-ISSN : **2964-2132**



Gambar 1. Diagram alir metode penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Metode Fungsi Penalti pada Sistem Kontrol Optimal Berkendala

Didefinisikan sistem ruang keadaan liear tidak bergantung waktu sebagai berikut :

$$\dot{\mathbf{x}} = A\,\mathbf{x}(t) + B\,\mathbf{u}(t) \qquad (9)$$

dan meminimumkan fungsi objektif

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{u})dt \qquad (10)$$

dimana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menyatakan keadaan, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ menyatakan kontrol, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$ dan $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Fungsi tujuan (10) dapat diubah menjadi

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$

dengan $\mathbf{V}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{x}^T Q\,\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{u},\; t_0 = 0,$

dan $t_f = \infty.$

Perhatikan kembali fungsi penalti

$$\begin{aligned} p(x) &= \dot{x}_{n+1}(t) \cong f_{n+1}(\mathbf{x}(t), t), \\ &= [g_1(\mathbf{x}(t), t)]^2 H(g_1) + [g_2(\mathbf{x}(t), t)]^2 H(g_2) + \ldots \\ &\quad + [g_p(\mathbf{x}(t), t)]^2 H(g_p), \end{aligned}$$

dimana

$$H(g_i) = \begin{cases} 0, & \text{jika } g_i(x(t), t) \geq 0, \\ 1, & \text{jika } g_i(x(t), t) < 0, \end{cases}$$

Perhatikan bahwa, untuk kondisi $g_i(\mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{u}(\mathrm{t}), \mathrm{t}) \geq 0, \forall\, i = 1, \ldots p$ maka sudah jelas $H(g_i) = 0, \forall\, i = 1, \ldots, p$ sehingga dapat diperoleh

$$\dot{x}_{n+1} = 0$$

Selanjutnya, defenisikan variabel baru $x_{n+1}(t)$ yang memiliki syarat batas

$$x_{n+1}(t_0) = 0 \text{ dan } x_{n+1}(t_f) = 0,$$

Sehingga, dari bentuk (4.1.3) didapatkan fungsi keadaan baru sebagai berikut :

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t_f} \dot{x}_{n+1}(t)\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \begin{array}{l} [g_1(\mathbf{x}(t), t)]^2 H(g_1) + [g_2(\mathbf{x}(t), t)]^2 H(g_2) + \ldots \\ + [g_p(\mathbf{x}(t), t)]^2 H(g_p) \end{array} \right\} dt$$

Akibatnya, sistem (4.1.1) berubah menjadi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\,\mathbf{x}(t) + B\,\mathbf{u}(t),\ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad (11)$$

Perhatikan kembali bentuk fungsi Hamiltonian dari sistem kontrol optimal sebagai berikut :

$$\mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

dimana L menyatakan fungsi tujuan dan f menyatakan sistem kontrol optimal, untuk sistem (11) dan fungsi tujuan (10) maka diperoleh

$$\mathrm{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\, \dot{\mathbf{x}}(t) \qquad (12)$$

dimana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ dan $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$.

Jurnal Teknologi Dan Sistem Informasi Bisnis
Vol. 5 No. 2 April 2023 Hal. 164 -169
http://jurnal.unidha.ac.id/index.php/jteksis

E-ISSN : **2655-8238**
P-ISSN : **2964-2132**

Perhatikan bahwa

$$\mathrm{H}(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{x}}$$

$$= \mathbf{V} + [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n \ \ \lambda_{n+1}] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{V} + \lambda_1\dot{x}_1 + \lambda_2\dot{x}_2 + \ldots + \lambda_n\dot{x}_n + \lambda_{n+1}\dot{x}_{n+1}$$

$$= \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{x}} + \lambda_{n+1}\dot{x}_{n+1}$$

Sedemikian sehingga dengan menggunakan pendekatan Hamiltonian untuk meminimalkan fungsi tujuan (2) dari sistem (1). Defenisikan Hamiltonian sebagai berikut :

$$\mathrm{H}(\mathbf{x}(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t}),\lambda_{n+1}(\mathrm{t}),\mathrm{t}) = \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{x}} + \lambda_{n+1}\dot{x}_{n+1}$$

Untuk meminimalkan fungsi tujuan (10) dan sistem (11) memiliki syarat cukup sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}}^*(\mathrm{t}) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda} = \dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}),$$

$$\dot{\mathrm{x}}^*_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t}) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda_{\mathrm{n+1}}} = \dot{x}_{n+1},$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(\mathrm{t}) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathrm{x}} = 0,$$

$$\dot{\lambda}^*_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t}) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathrm{x}_{\mathrm{n+1}}} = 0$$

Sehingga kontrol dalam keadaan yang optimal, maka u(t) harus memenuhi pertidaksamaan sebagai berikut :

$$\min_{|\mathbf{u}(\mathrm{t})|\leq\mathbf{U}}\{\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\mathrm{t}),\lambda^*_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t}),\mathrm{t})\}$$
$$= \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\mathrm{t}),\lambda^*_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t}),\mathrm{t})$$

B. Algoritma Mengkonstruksi Sistem Kontrol Optimal Berkendala dengan Menggunakan Metode Fungsi Penalti

Dari hasil pembahasan diatas maka dapat dirangkum langkah-langkah merubah sistem kontrol optimal dari sistem berkendala dengan keadaan yang juga berkendala menjadi tidak berkendala menggunakan metode fungsi penalti sebagai berikut :

1. Identifikasi Masalah
   Dimana diberikan sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

dan fungsi tujuan

$$\mathrm{J} = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{V}(\mathbf{x}(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),\mathrm{t})dt,$$

dengan batasan keadaan

$$g(\mathbf{x}(\mathrm{t}),\mathrm{t}) \geq 0,$$

dan syarat batas

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0} \quad \text{dan} \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_{\mathrm{f}} \ \text{bebas}$$

2. Bentuk fungsi Hamiltonian

$$H(\mathbf{x}(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t}),\lambda_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t}),\mathrm{t}) = \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}^T\dot{\mathbf{x}} + \lambda_{\mathrm{n+1}}x_{n+1}$$

3. Tentukan syarat cukup untuk meminimumkan

$$\dot{\mathbf{x}}^*(\mathrm{t}) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda}, \qquad \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(\mathrm{t}) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathrm{x}}$$

$$\dot{\mathrm{x}}^*_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t}) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda_{\mathrm{n+1}}}, \qquad \dot{\lambda}^*_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t}) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathrm{x}_{\mathrm{n+1}}} = 0$$

4. Tentukan kontrol optimal

$$\min_{|\mathbf{u}(\mathrm{t})|\leq\mathbf{U}}\{\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\mathrm{t}),\lambda^*_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t}),\mathrm{t})\}$$
$$= \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\mathrm{t}),\lambda^*_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t}),\mathrm{t})$$

Untuk lebih memahami bagaimana menentukan kontrol optimal dari sistem bekendala dengan keadaan yang juga berkendala dengan menggunakan metode fungsi penalti, perhatikan contoh soal sebagai berikut :
Diberikan sistem kontrol optimal sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

dan fungsi tujuan sebagai berikut

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}^T\mathbf{u}\right]dt \qquad (14)$$

dimana keadaan x (t_f) bebas dan kontrol u(t) berkendala dengan
$-1 \leq \mathrm{u}(\mathrm{t}) \leq +1$ atau $|\mathrm{u}(\mathrm{t})| \leq +1$ untuk $\mathrm{t} \in [\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_{\mathrm{f}}]$
dan keadaan $x_2(t)$ berkendala dengan
$-3 \leq \mathrm{x}_2(\mathrm{t}) \leq +3$ atau $|\mathrm{x}_2(\mathrm{t})| \leq +3$ untuk $\mathrm{t} \in [\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_{\mathrm{f}}]$

Langkah 1. Identifikasi masalah
Untuk menyatakan kendala keadaan berkendala diatas sebagai keadaan dengan batasan (4), maka kita tentukan batasan g_1 dan g_2 sebagai berikut

$$|x_2(t) + 3| \geq 0, \qquad (15)$$

$$|3 - x_2(t)| \geq 0 \qquad (16)$$

Dari defenisi fungsi (4) dapat kita ketahui bahwa $g(x(t),t) \geq 0$ dan dari fungsi kendala diketahui

Jurnal Teknologi Dan Sistem Informasi Bisnis
Vol. 5 No. 2 April 2023 Hal. 164 -169
http://jurnal.unidha.ac.id/index.php/jteksis

E-ISSN : 2655-8238
P-ISSN : 2964-2132

bahwa $x_2(t)$ dibatasi dengan $-3 \le x_2 \le +3$ sedemikian sehingga diperoleh g_1 dan g_2 sebagai berikut

$$g_1(\mathbf{x}(t)) = [x_2(t)+3] \ge 0, \qquad (17)$$

$$g_2(\mathbf{x}(t)) = [3 - x_2(t)] \ge 0. \qquad (18)$$

Berdasarkan soal diketahui bahwa :

1) Nilai **V** sebagai berikut :

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{u}^T \mathbf{u}\right] dt$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\, dt$$

2) Nilai $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{x}}(t)$ sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda_1 . x_2(t) - \lambda_2 . u(t)$$

3) Nilai $\lambda_{n+1} . \mathbf{x}_{n+1}$ sebagai berikut :

$$\lambda_{n+1} . \mathbf{x}_{n+1} = \lambda_3(t) \begin{Bmatrix} [x_2(t)+3]^2 .\ H(x_2(t)+3) + \\ [3 - x_2(t)]^2 . H(3 - x_2(t)) \end{Bmatrix}$$

Langkah 3. Hitung syarat cukup untuk meminimumkan.

$$\dot{x}_1^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = x_2^*(t),$$

$$\dot{x}_2^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = u^*(t),$$

$$\dot{x}_3^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = [x_2(t)+3]^2 H(x_2(t)+3) +$$

$$[3 - x_2(t)]^2 H(3 - x_2(t)),$$

$$\dot{\lambda}_1^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -x_1^*(t),$$

$$\dot{\lambda}_2^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1^*(t) - 2\lambda_3^*(t)[x_2^*(t)+3]$$

$$H(x_2^*(t)+3) + 2\lambda_3^*(t)[3 - x_2^*(t)] H(3 - x_2^*(t))$$

$$\dot{\lambda}_3^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0 \rightarrow \lambda_3^*(t) = \text{konstant.}$$

Langkah 4. Tentukan kontrol optimal.

$$\min_{|\mathbf{u}(t)| \le \mathbf{U}} \{\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), \lambda_{n+1}^*(t), t)\}$$
$$= \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), \lambda_{n+1}^*(t), t)$$

hitung kontrol menggunakan bentuk hamiltonian mengabaikan semua yang tidak mengandung kontrol $u(t)$, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{2}u^{*2}(t) + \lambda_2^*(t)\, u^*(t) \le \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_2^*(t)\, u(t) =$$
$$\min_{|u| \le 1}\left\{\frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_2^*(t)\, u(t)\right\}. \qquad (19)$$

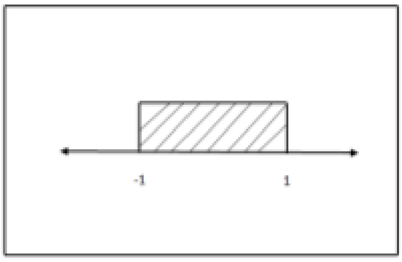
gunakan kalkulus sederhana maka diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow u^*(t) + \lambda_2^*(t) = 0 \rightarrow u^*(t) = -\lambda_2^*(t) \quad (20)$$

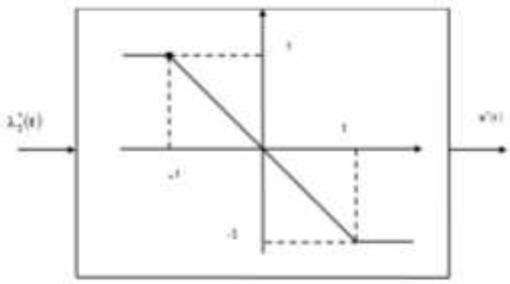
dari sistem kontrol optimal berkendala (13), kita bisa ketahui bahwa berdasarkan (19) dan (20)

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, & \text{jika } \lambda_2^*(t) < -1 \\ -1, & \text{jika } \lambda_2^*(t) > +1 \\ -\lambda_2^*(t), & \text{jika } -1 \le \lambda_2^*(t) \le +1. \end{cases} \qquad (21)$$

Akibatnya pada situasi (21) menunjukkan bahwa $u^*(t)$ adalah sistem kontrol optimal untuk sistem yang tidak berkendala dengan $\lambda_2^*(t)$ adalah keadaan yang juga tidak berkendala. Berikut gambar dari sistem kontrol optimal berkendala dengan keadaan yang juga berkendala dan sistem kontrol optimal tidak berkendala dengan keadaan yang juga tidak berkendala berturut-turut diberikan pada Gambar 2 dan Gambar 3 berikut



Gambar 2. Sistem Kontrol Optimal Berkendala dengan Keadaan yang juga Berkendala



Gambar 3. Sistem Kontrol tidak Berkendala dan Keadaan yang juga tidak Berkendala

Jurnal Teknologi Dan Sistem Informasi Bisnis
Vol. 5 No. 2 April 2023 Hal. 164 -169
http://jurnal.unidha.ac.id/index.php/jteksis

E-ISSN : **2655-8238**
P-ISSN : **2964-2132**

SIMPULAN

Sistem kontrol optimal berkendala dengan keadaan berkendala dapat diubah menjadi sistem kontrol optimal tidak berkendala dengan mengkonstruksi nilai u(t) sehingga u(t) tidak berkendala. Dengan menggunakan metode fungsi penalti, kontrol optimalnya harus memenuhi :

$$\min_{|u(t)|\le U}\{\mathcal{H}(x^*(t),u(t),\lambda^*(t),\lambda^*_{n+1}(t),t)\} = \mathcal{H}(x^*(t),u(t),\lambda^*(t),\lambda^*_{n+1}(t),t)$$

UCAPAN TERIMAKASIH

Kami mengucapkan terima kasih yang tulus atas kerjasama pihak JTeksis Universitas Dharma Andalas yang telah banyak membantu kami dalam penyelesaian artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kedelapan-Jilid 1*. Erlangga. Jakarta.
[2] Beauthier, C. dan Joseph J. Winkin. 2010. *LQ-Optimal Control of Positive Linear System*. Wiley Online Library.
[3] Bahri, S. 2017. *Teori Pengoptimuman*. FMIPA UNRAM. Mataram
[4] Budi, W.S. 2001. *Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya*. ITB Press. Bandung.
[5] B.W. Kort and D.P Bertsekas. 1972. *A New Penalti function method for constrained minimization.* IEEE Conference on Decision and Control.
[6] Coit, A.E.1997. *Penalti Funcion*. USA: IOP Publishing Ltd and Oxford University Press.
[7] Hendricks. Elbert, Ole. Jannerup dan P. H. Sorensen. 2008. *Linear Systems Control*. Springer- Verlag Berlin Heidelberg.
[8] Lewis, F.L. Vrabie, D.L., & Syrmos, V.L. 2012. *Optimal Control Third Edition*. Wiley. New Jersey.
[9] Lian, S. Meng, S. & Wang, Y. 2018. *An Objective Penalty Function-Based Method for Inequality Constrained Minimization Proble.* Hindawi.
[10] Meyer. Carl D. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM
[11] Naidu, D.S. 2002. *Optimal Control Systems*. CRC Press, Idaho.
[12] Purcell. Varberg., & Rigdon. 2010. *Kalkulus Edisi Kesembilan-Jilid 2*. Erlangga. Jakarta
[13] Roszak, B. dan Davidson, E. J. 2009. *Necessary and Sufficient Conditions for Stabilizability of Positive LTI System*. System and Control Letters 58(2009). 474-481.
[14] Rina, I., & Putri, N. (2022). Menentukan Panjang Pipa Terpendek Untuk Pemasangan Jaringan Pipa Pdam Di Kecamatan Koto Tangah Kota Padang. *Jurnal Teknologi Dan Sistem Informasi Bisnis*, *4*(1), 84-88.
[15] Sulfayanti. Toaha, S., & Khaerudin. 2014. *Aplikasi Kontrol Optimal pada Perubahan Perilaku Manusia.* Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi. Vol.11, No.1.
[16] Yu. C, Teo. K & Zhang, L. 2010. *A New Exact Penalty Function Method For Continuous Inequality Constrained Optimization Problems.* Journal of Industrial And Management Optimization Vol 6, No 4.