

## KARAKTERISASI SEBARAN BINOMIAL NEGATIF-BINOMIAL NEGATIF

**Deby Handayani**

<sup>1</sup>Fakultas Ekonomi, Universitas Sumatera Barat

email: debyhandayani45@gmail.com

### Abstract

*This study discusses the convolution or the sum of independent and identical random variables, where the random variables are two distribution of Negative Binomial distribution so that the resulting distribution is known as the Negative Binomial - Negative Binomial. The purpose of this study is to find the characteristics of the distribution including the expected value, the variance value, the moment generating function and the characteristic function. This property is obtained by using theorems and lemmas that relate to the properties of a distribution. It is found that the expected value, variance value, moment generating function and characteristic function of the Negative Binomial-Exponential distribution are*

$$E(S) = \left[ \frac{r(1-p)}{p} \right]^2, \text{Var}(S) = \left[ \frac{r(1-p)}{p} \right]^2 \left[ \frac{p+r(1-p)}{p^2} \right], M_S(t) = \left[ \frac{p(1-(1-p)e^t)^r}{(1-(1-p)e^t)^r - (1-p)p^r} \right]^r \text{ dan}$$

$$\varphi_S(t) = \left[ \frac{p(1-(1-p)e^{it})^r}{(1-(1-p)e^{it})^r - (1-p)p^r} \right]^r$$

**Keywords:** Convolution, Characteristics, Negative Binomial - Negative Binomial Distribution

### Abstrak

Penelitian ini membahas tentang konvolusi atau penjumlahan dari peubah acak yang saling bebas dan identik, dimana peubah acak tersebut adalah dua buah distribusi Binomial Negatif, sehingga sebaran yang terbentuk dikenal dengan nama distribusi Binomial Negatif- Binomial Negatif. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mencari karakteristik dari sebaran tersebut diantaranya nilai harapan, nilai variansi, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik. Sifat ini diperoleh dengan menggunakan teorema-teorema dan lemma yang berhubungan dengan sifat-sifat pada sebuah distribusi. Diperoleh bahwa nilai harapan, nilai variansi, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik dari distribusi Binomial Negatif- Binomial Negatif berturut turut adalah

$$E(S) = \left[ \frac{r(1-p)}{\lambda p} \right]^2, \text{Var}(S) = \left[ \frac{r(1-p)}{\lambda p} \right]^2 \left[ \frac{p+r(1-p)}{p^2} \right], M_S(t) = \left[ \frac{p(1-(1-p)e^t)^r}{(1-(1-p)e^t)^r - (1-p)p^r} \right]^r \text{ dan}$$

$$\varphi_S(t) = \left[ \frac{p(1-(1-p)e^{it})^r}{(1-(1-p)e^{it})^r - (1-p)p^r} \right]^r$$

**Kata Kunci:** Konvolusi, Karakterisasi, Distribusi Binomial Negatif-Binomial Negatif

*This work is licensed under Creative Commons Attribution License 4.0 CC-BY International license*



## PENDAHULUAN

*Compound Distribution* atau yang dikenal dengan nama distribusi majemuk merupakan distribusi peubah acak yang terbentuk dari hasil penjumlahan peubah-peubah acak yang dinyatakan dengan  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  dimana  $N$  adalah peubah acak dan  $X_1, X_2, \dots, X_N$  saling bebas (Steufel & Vanham, 2013). Ketika  $N$  menyebar menurut distribusi Binomial Negatif maka sebaran tersebut disebut sebaran Binomial Negatif Majemuk. Selanjutnya ketika  $N$  menyebar menurut distribusi Binomial Negatif dan  $X$  menyebar menurut distribusi Binomial Negatif, maka sebaran tersebut disebut distribusi Binomial Negatif – Binomial Negatif (Wang, 2011). Distribusi ini banyak digunakan dalam teori antrian ataupun dalam masalah asuransi (While, 1975).

Sebaran Binomial Negatif adalah distribusi yang memiliki banyak cara dalam penurunannya, salah satunya adalah sebagai salah satu percobaan Bernoulli yang dilakukan sampai terjadi  $k$  buah sukses, dengan setiap pengulangannya saling bebas dimana probabilitas gagalnya adalah  $1 - p$  dan probabilitas suksesnya adalah  $p$  (Furman, 2007). Sebaran Binomial Negatif memiliki fungsi kepadatan peluang

$$P(X = x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x$$

dimana  $x = 0, 1, 2, \dots$  dan  $0 \leq p \leq 1$

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mencari karakterisasi dari sebaran Binomial Negatif- Binomial Negatif memiliki beberapa karakterisasi diantaranya nilai harapan yang menggambarkan letak pusat suatu distribusi peluang, nilai variansi yang menggambarkan keragaman suatu distribusi, fungsi pembangkit momen yang memiliki kegunaan untuk membangkitkan momen-momen distribusi, dan fungsi karakterisasi yang

digunakan untuk mengkaji kekonvergenan suatu fungsi distribusi

## LANDASAN TEORI

Jika  $X$  adalah peubah acak yang berdistribusi Binomial Negatif yang memiliki fungsi kepadatan peluang [4] sebagai berikut:

$$P(X = x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x$$

dimana  $x = 0, 1, 2, \dots$  dan  $0 \leq p \leq 1$

Maka karakteristik dari peubah acak  $X$  adalah:

1. Nilai harapan dari peubah acak  $X$  adalah  $E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$
2. Nilai variansi dari peubah acak  $X$  adalah  $Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$
3. Fungsi pembangkit momen dari peubah acak  $X$  adalah  $M_X(t) = \left( \frac{p}{(1-(1-p)e^t)} \right)^r$
4. Fungsi karakteristik dari peubah acak  $X$  adalah  $\varphi_X(t) = \left( \frac{p}{(1-(1-p)e^{it})} \right)^r$

Distribusi majemuk merupakan penjumlahan dari peubah-peubah acak dimana banyaknya peubah acak tersebut juga merupakan peubah acak dituliskan  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  dimana  $X$  dan  $N$  masing-masing merupakan peubah acak dari  $X_i$  peubah acak yang saling bebas dan identik. Karakteristik dari peubah acak  $S$  adalah :

1. Nilai harapan dari peubah acak  $S$  adalah  $E(S) = E(N)E(X)$
2. Nilai harapan dari peubah acak  $S$  adalah  $Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)[E(X)]^2$
3. Fungsi pembangkit momen peubah acak  $S$  adalah  $M_S(t) = M_N[\ln(M_X(t))]$
4. Fungsi karakteristik peubah acak  $S$  adalah  $\varphi_S(t) = M_N[\ln(\varphi_X(t))]$

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilaksanakan dengan menggunakan literatur (kepuustakaan), baik berupa buku maupun laporan penelitian sebelumnya. Penelitian ini merupakan penelitian pada bidang statistika yang bertujuan mencari karakterisasi sebaran Binomial Negatif – Binomial Negatif dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mempelajari materi yang diperoleh dan membuktikan teorema yang terkait dengan penelitian ini
2. Menentukan karakterisasi sebaran Binomial Negatif
3. Menentukan karakterisasi sebaran Distribusi Majemuk
4. Menentukan karakterisasi sebaran Binomial Negatif- Binomial Negatif yang terdiri dari nilai harapan, nilai variansi, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Jika  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  dimana  $X$  dan  $N$  masing-masing merupakan merupakan peubah acak dimana  $X$  dan  $N$  merupakan distribusi Binomial Negatif maka peubah acak  $S$  disebut distribusi Binomial Negatif-Binomial Negatif. Nilai harapan dari peubah acak  $S$  adalah

$$E(S) = \left[ \frac{r(1-p)}{p} \right]^2$$

Bukti.

Dari nilai harapan distribusi majemuk diperoleh  $E(S) = E(N)E(X)$  maka  $E(S) = \frac{r(1-p)}{p} \cdot \frac{r(1-p)}{p}$

Nilai variansi dari peubah acak  $S$  adalah

$$Var(S) = \left[ \frac{r(1-p)}{p} \right]^2 \left[ \frac{p+r(1-p)}{p^2} \right]$$

Bukti.

Dari nilai variansi distribusi majemuk diperoleh  $Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)[E(X)]^2$  maka

$$\begin{aligned} Var(S) &= \frac{[r(1-p)]^2}{p^3} + \frac{[r(1-p)]^3}{p^4} \\ &= \left[ \frac{r(1-p)}{p} \right]^2 \left[ \frac{p+r(1-p)}{p^2} \right] \end{aligned}$$

Fungsi pembangkit momen dari peubah  $S$  adalah

$$M_S(t) = \left[ \frac{p(1-(1-p)e^t)^r}{(1-(1-p)e^t)^r - (1-p)p^r} \right]^r$$

Bukti.

Dari fungsi pembangkit momen distribusi majemuk diperoleh  $M_S(t) = M_N[\ln(M_X(t))]$  maka

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \left[ \frac{p}{1-(1-p)\left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^r} \right]^r \\ &= \left[ \frac{p}{1-\frac{(1-p)p^r}{(1-(1-p)e^t)^r}} \right]^r \\ &= \left[ \frac{p(1-(1-p)e^t)^r}{(1-(1-p)e^t)^r - (1-p)p^r} \right]^r \end{aligned}$$

Sedangkan fungsi karakteristik peubah acak  $S$  diperoleh

$$\varphi_S(t) = \left[ \frac{p(1-(1-p)e^{it})^r}{(1-(1-p)e^{it})^r - (1-p)p^r} \right]^r$$

Bukti.

Dari fungsi karakteristik distribusi majemuk diperoleh  $\varphi_S(t) = M_N[\ln(\varphi_X(t))]$  maka

$$\begin{aligned} \varphi_S(t) &= \left[ \frac{p}{1-(1-p)\left(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}}\right)^r} \right]^r \\ &= \left[ \frac{p}{1-\frac{(1-p)p^r}{(1-(1-p)e^{it})^r}} \right]^r \\ &= \left[ \frac{p(1-(1-p)e^{it})^r}{(1-(1-p)e^{it})^r - (1-p)p^r} \right]^r \end{aligned}$$

## SIMPULAN

Diberikan  $S$  adalah sebuah distribusi majemuk yang terdiri dari dua buah distribusi Binomial Negatif yang saling acak bebas dan identik, maka peubah acak  $S$  disebut distribusi Binomial Negatif- Binomial Negatif. Karakteristik dari

peubah acak  $S$  adalah  $E(S) = \left[ \frac{r(1-p)}{\lambda p} \right]^2$ ,

$Var(S) = \left[ \frac{r(1-p)}{\lambda p} \right]^2 \left[ \frac{p+r(1-p)}{p^2} \right]$ ,  $M_S(t) =$

$\left[ \frac{p(1-(1-p)e^t)^r}{(1-(1-p)e^t)^r - (1-p)p^r} \right]^r$  dan

$\varphi_S(t) = \left[ \frac{p(1-(1-p)e^{it})^r}{(1-(1-p)e^{it})^r - (1-p)p^r} \right]^r$

## UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Universitas Sumatera Barat yang telah memberikan dorongan dan motivasi. Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada Dr. Dodi Devianto yang telah banyak membantu selama penelitian ini berlangsung

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Artikus, T. 1981. "Constructing Infinitely Divisible Characteristic Functions. *Arc-Math*, hal 57-62
- [2] Bain, L.J. dan M. Engelharot. 1992. "Introduction to Probability and Mathematical Statistics Second Edition". Duxbury Press, California.
- [3] Casella, G. dan R. L. Berger. 1990. "Statistical Inference Ed. 1". Pacific Grove, California.
- [4] Chung, K. L. 2001. "A Course In Probability Theory. 3<sup>rd</sup>ed". Academy Press, Sandiago.
- [5] Furman, E. 2007. "On the Convolution oh The Negative Binomial Random Variables". *Statistics and probability Letter*.

Vol 77 Hal 169-172.

- [6] Handayani, D. 2021. "Karakteristik Sebaran Binomial Negatif-Eksponensial". *Jostech*, hal (115-123)
- [7] Laha, R.G. dan V.K . Rohagi. 1979. "Probability Theory". Jhon Willey Son, New York.
- [8] Lukacs, E. 1992. "Characteristic Function". Griffin, London.
- [9] Mainardi, F dan S. Rogosin. 2005. 2005. "The Origin of Infinitely Divisible Distribution: from de Finetti's problem to Levy-Khintchine Formula". *MMEF*, Vol 1(2005), pp 37-55.
- [10] Panjer, H.H. dan G.E. Willot. 1981. "Finite Sum Evaluation of The Negative Binomial-Eksponensial Model". *Astin Buletin*, 133-137.
- [11] Sato, K. 2013. "levy processes and Infinitely Divisible Distibutions". *Cambridge Studies in Advance Mathematics*.
- [12] Schmidli, H. 2013. "Risk Theory". *Institute of Mathematics: University of Cologne*. Pp 133-137.
- [13] Steutel, F.W. dan Vanham, K. 2013. "Infinite Divisibility of Probability Distribution On the Real Line". Marcel Dekker, Inc, Newyork.
- [14] Wabg, Z. 2011. "One mix Negative Binomial istribution with Application". *Statistical Planning*. Hal 1153-1160.
- [15] While, J. 1975. "Analysis of Queuing System Edition". Academic Press, Newyork.